دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

تمرین سری ششم | عنوان تمرین | تاریخ تحویل: ۹ دی

۱. فرض کنید تجزیه SVD ماتریس A به صورت $A = U\Sigma V^T$ باشد. در این صورت تجزیه SVD ماتریس $(A^TA)^{-1}$ را بیابید. (فرض کنید که A ماتریسی full rank است.)

۲. فرض کنید V یک فضا با بعد متناهی باشد و $dim(V) > 1$. ثابت کنید مجموعه توابع غیر وارون‌پذیر روی V، زیرفضایی از $l(V)$ نمی‌باشد.

۳. فرض کنید $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ و $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ دو پایه متعامد یکه [1] برای R^n باشند. ماتریس A ماتریسی است که هر بردار $\overrightarrow{v_j}$ را به $\overrightarrow{u_j}$ تبدیل کند به طوری که $\forall 1 \leqslant i \leqslant n : A\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{u_i}$

برای ماتریس A یک رابطه صریح پیدا کنید. این ماتریس چه خاصیتی دارد؟

۴. تابع $f : R^2 \to R$ مثال بزنید به طوری‌که برای تمام $v \in R^2$ و عدد حقیقی r داشته باشیم:

$$f(rv) = rf(v)$$

اما نگاشت خطی نباشد.

۵. الف) گزاره ی زیر را درصورت درستی، اثبات کرده و در غیر این صورت با آوردن مثال نقض، نادرستی آن را نشان دهید.

ـ اگر $T \in L(V)$ باشد، آنگاه مقادیر تکین T^2 برابر است با مربع مقادیر تکین T

ب) نگاشت خطی $T \in L(C^2)$ به صورت $T(x, y) = (-4y, x)$ تعریف شده است. مقدار ویژه [2] های T را بیابید.

۶. ثابت کنید اگر A ماتریسی full rank باشد، جواب مسئله

$$min_x||Ax - b||_2$$

برابر $x = V\Sigma^{-1}U^Tb$ است. (U, V, Σ مربوط به تجزیه SVD هستند.)

۷. با استفاده از تجزیه SVD برای ماتریس A با رتبه [3] r، روشی برای یافتن بهترین تقریب رتبه k که $k \leqslant r$ ارائه دهید. منظور از بهترین تقریب، ماتریسی مانند X است که $min||A - X||_F$ [4] کمینه باشد.

(توجه: لازم نیست ثابت کنید چرا پاسخ شما بهترین تقریب است. راهنمایی: به حالت یکتایی تجزیه SVD دقت کنید.)

[1] orthogonal
[2] eigen value
[3] rank
[4] frobenius norm